**4-2 等距;保形映射** 2020年6月11日09点50分

第2-5节的示例1和2显示了一个有趣的特性。 尽管圆柱体和平面是不同的表面，但是它们的第一个基本形式是“相等的”（至少在我们考虑的坐标邻域中）。 这意味着，就内在度量问题（长度，角度，面积）而言，平面和圆柱体在本地的行为方式相同。 （这很直观，因为通过沿发电机切割圆柱，我们可以将圆柱展开到平面的一部分上。）在本章中，我们将看到与规则曲面相关的许多其他重要概念仅取决于第一基本形式和 应该包含在内在概念的类别中。 因此，方便的是，我们以精确的方式来表示具有相同的第一基本形式的两个规则曲面的含义.

和将始终表示规则曲面.

**定义1** 一个微分同构是等距的仅当所有的和所有的向量对满足

则曲面和被称为等距的.

换句话说,如果微分保留了内积,则微分同构是等距的.因此,是等距,

对所有成立. 相反,如果微分同构保留了第一个基本形式,即,

则

和因此是等距的.

**定义2** 如果存在的邻域,使得是等距,则的邻域的映射在p处的是局部等距的.如果在每个处存在局部等距映射到,则称表面是的局部等距.如果和互为局部等距,则和是局部等距的.

**命题1** 假设存在参数化和,使得中的.那么映射是局部等距的.

**定义3** 一个微分同构被称为保形映射仅当所有的和所有的向量对满足

其中是S上非零可微函数;曲面和则被称为是保形的.一个在领域V上的映射被称为在处的局部保形映射仅当存在一个领域使得是一个保形映射.如果对于每个,在处存在一个局部保形映射,则表面S被称为的局部保形.

**命题2** 令和为参数化,使得中的,其中是U中的零位微分函数.则映射是一个局部保形映射.

**定理** 任何两个规则表面是局部保形的.

**4-3 高斯定理和相容方程** 2020年6月16日10点02分

第3章的性质是通过研究点附近切线平面的变化而获得的.继续用曲线进行类比,我们将为曲面的每个点分配一个三面体（Frenet的三面体的类似物）,并研究其向量的导数.

S通常将表示规则的,可定向的和有向曲面.令是方向上的参数化.可以为的每个点分配一个由向量和构成的自然三面体.对该三面体的研究将成为本节的主题.

通过在的基函数上表达向量和的导数,我们得到

其中在第3章中获得,并确定其他系数.在参数化x中,系数称为S的克里斯托弗尔符号.由于,我们得出的结论是和;也就是说,克里斯托弗尔符号相对于下标是对称的.

通过取(1)中前四个关系与N的内积,我们立即获得,其中是S第二基本形式的系数.

为了确定克里斯托弗尔符号,我们采用与和的前四个关系的内积,得到系统

请注意,上述方程已分为三对方程式,对于每对方程式,系统的行列式为.因此,可以求解上述系统,并根据条件*计算克里斯托弗尔符号,并以第一基本形式的系数及其导数表达*.我们不会获得的明确表达式,因为使用系统(2)在每种特定情况下都更容易工作. (请参见下面的示例1.)但是,我们可以求解系统(2)的事实带来的以下后果非常重要:*所有以克里斯托弗尔符号表示的几何概念和性质在等距下都是不变的*.

例1 卷积曲面的克里斯托弗尔符号

如我们所见,在的基函数上,和的导数的表达式仅涉及S的第一和第二基本形式的系数的知识.这些系数是要考虑的表达式

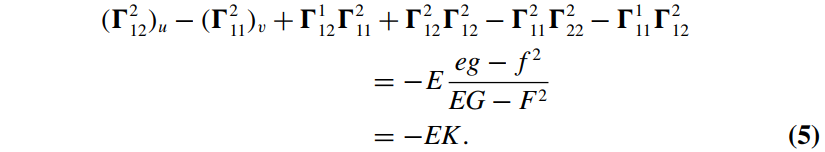
通过引入(1)的值,我们可以将以下关系写为

其中是及其导数的函数.由于向量和是线性独立的.因此（3a）表示存在九种关系:

例如,我们将确定关系.通过使用(1)的值,关系(3)的第一个公式可写作为

通过再次使用(1)并等于的系数,我们得到

介绍已经计算出的的值（请参阅第3-3节），可以得出以下结论:



高斯绝妙定理 曲面的高斯曲率K在局部等距变换下不变.

实际上,如果是的参数化,并且如果(其中是的邻域)是处的局部等距映射,则是在的参数化.由于是等距映射,因此参数和中第一基本形式的系数在对应点和,处一致.因此,相应的Christoffel符号也一致.由式(5),在给定的参数化点,可以根据克里斯多夫尔符号在一个点上计算K.因此,对于所有q∈V, .

根据第一基本形式及其导数的系数得出上述K值的上述表达式称为高斯公式。它是由高斯首先在著名论文中证明的[1]。高斯定理通过其后果的扩展被认为是微分几何最重要的事实之一。目前，我们仅提及以下推论。正如第4-2节中所证明的，链状体与螺旋体在局部等距。从高斯定理得出，高斯曲率在相应点相等，这在几何上是不平凡的。实际上，一个非凡的事实是，诸如高斯曲率这样的概念（其定义主要使用空间中的表面位置）并不取决于该位置，而仅取决于度量结构（第一基本形式）表面。在下一节中，我们将看到许多其他微分几何概念与高斯曲率处于相同的设置。也就是说，它们仅取决于表面的第一种基本形式。因此，有必要讨论第一种基本形式的几何，我们称其为固有几何，因为它可以在不参考包含曲面的空间的情况下进行开发（一旦给出了第一种基本形式）。

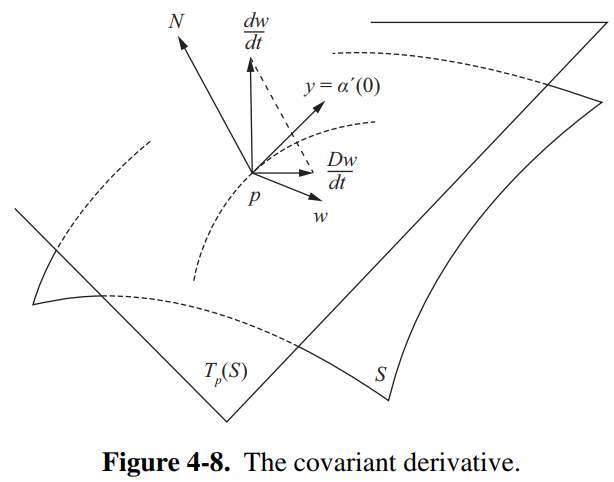
考虑到进一步的几何结果,我们回到计算中.通过等式(4)中的系数,我们看到关系可以写成形式

通过在等式(4)中也等于N的系数,我们得到的形式为

**4-4 平行传输,测地线[Geodesics]** 2020年6月17日10点48分

定义1 设是开集上的一个可微向量场,且.设.考虑一个参数曲线

其中,令是约束在曲线上的向量场.则通过法线投影到平面上获得的向量被称为向量场w关于向量在点的**协变导数[covariant derivative]**.协变导数标记为或.

**

定义2 假设参数化曲线是约束在可微映射上的函数.如果且,我们说连接p到q.如果,则是规则的.

定义3 令是中的参数化曲线.沿的向量场为每个分配一个向量

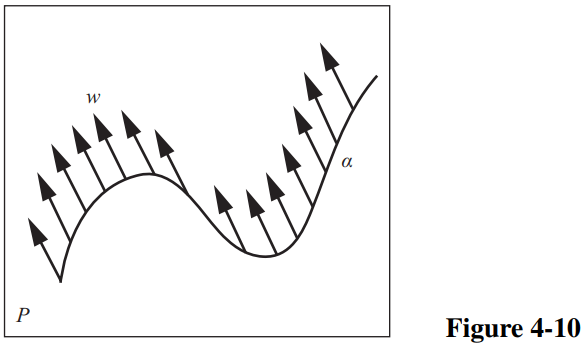
如果对于中的某些参数化的分量是的微分函数,则矢量场在处是可微的.如果每个都可以微分,则在中是微分的.

从表面外部的角度来看，为了获得沿w的场w的协变导数：t→I处的S→S，我们取t中w的常导数（dw / dt）（t）并投影 此向量正交于切平面Tα（t）（S）。 因此，当两个表面沿参数化曲线α切线时，沿α的场w的协变导数对于两个表面都是相同的。

如果α（t）是S上的曲线，我们可以将其视为在表面上移动的点的轨迹。 那么，α（t）是速度，α（t）是α的加速度。 场α（t）的协变导数Dα/ dt是加速度α（t）的切向分量。 直观地，Dα/ dt是“从表面S看”点α（t）的加速度。

定义5 沿参数化曲线的向量场称为平行的仅当对每一个恒成立.

在平面的特定情况下,沿参数化曲线的平行场的概念减少为沿曲线的恒定场的概念:也就是说,向量的长度及其与固定方向的角度是恒定的(图4-10).如下命题所示,这些特性在任何表面上都得到了部分重新获得.



**命题1** 令和为沿的平行矢量场.则为常数.特别是和是常数,而和之间的角度是常数.

**命题2** 设是S中的一个参数曲线,令.则存在沿着唯一的平行向量场,且.

2020年6月23日10点18分

定义6 设是S中的一个参数曲线,且.设是沿着的平行向量场,其中.则向量,被称为沿着在点的的平行传输.

定义7 映射是参数化的分段规则曲线当且是连续的并且在区间存在细分

使得约束是一个参数化规则曲线.每一个被称为的一个规则弧.

**定义8** 非常量参数曲线被称为处的测地线[geodesic]仅当其切向量场沿着平行;即

如果对所有都是测地线,则是参数化的测地线.

定义8a对于每个,如果以弧长为的坐标邻域的参数化是参数化测地线,则将中的规则连接曲线C称为测地线.即,是沿着的平行矢量场.

从外部角度来看曲面S,定义8a等于说垂直于切平面,即平行于表面的法线.换句话说,规则曲线是测地线当且仅当每个点处的主法线与处的法线平行.

**定义9** 令为沿着定向曲面上的参数化曲线的单位矢量的可微场.由于是单位矢量场,是的法线,因此

由表示的实数称为在处的协变导数的代数值.

观察到的符号取决于的方向,并且.

定义10 令为定向曲面中包含的定向规则曲线,令为附近C弧长s参数化.在p处的协变导数的代数值称为C在p处的测地曲率.

引理1 设和是中的可微函数,且,存在使得.则微分函数

使得且.

**引理2** 设v和w是两个沿着曲线的可微向量场,其中.则

其中是引理1给出的从v到w的角度的可微确定之一.(**该定理的证明过程存在符号书写错误,有可能是自己没看懂，需要注意**.)

**命题3** 令是定向表面S的邻域的正交参数化(即F = 0),而是沿着曲线的单位矢量的可微域.则

其中是在给定方向上从到的角度.

命题4 令为定向曲面S上正则定向曲线C的点p∈S的邻域的弧长的参数化.令为S在p的正交参数化,是在给定方向上与所成的角度.则

其中和分别是坐标曲线和的测地曲率.

命题5 给定一个点p∈S和一个向量,存在一个和一个唯一的参数化测地线，使得.

由于时间关系，剩余内容跳过.